Aula 7 - Supersaturação e Estabilidade

Uma vez que sabemos o número extremal de um grafo H, surgem duas outras perguntas:

ⓐ O que podemos dizer sobre a estrutura de grafos H-livres com $ex(n,H)-t$ arestas? (Teoremas de Estabilidade)

ⓑ Quantas cópias de H existem em um grafo com $ex(n,H)+t$ arestas? (Teoremas de supersaturação)

→ A grosso modo, teoremas de estabilidade dizem que se t não for muito grande, então G é "similar" a um dos grafos H-extremais.

Teo 1. Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo K_3-livre com n vértices. Se

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t,$$

então G contém um subgrafo bipartido com pelo menos $e(G)-t$ arestas.

Teo (Mantel, 1907) Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo K_3-livre com n vértices. Então

$$e(G) \leq \frac{n^2}{4}.$$

Além disso, $e(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ se e somente se $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Cor. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

i) $ex(n, K_3) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$

ii) $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ é o único grafo K_3-extremal.

→ A grosso modo, teoremas de supersaturação apresentam um limitante inferior para o número de cópias de H em um grafo G tal que

$$e(G) > ex(n, H)$$

Teo 2. Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo com n vértices. Se

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t,$$

então G contém pelo menos $tn/3$ triângulos.

- Dizemos que G é *t-longe de ser bipartido* se $e(G') \leqslant e(G) - t$ para todo subgrafo bipartido G' de G (isto é, precisamos remover ao menos t arestas de G para transformá-lo em um grafo bipartido).

- Dizemos que G é *t-próximo de ser bipartido* se existe um subgrafo gerador bipartido G' tal que $e(G') \geqslant e(G) - t$.

TEO 3. Sejam $n, t \in \mathbb{N}$, e seja G um grafo com n vértices. Se G é t-longe de ser bipartido, então há pelo menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G) + t - \frac{n^2}{4}\right)$$

triângulos em G.

Demonstração.

⚠ $u \in A_u$

- Para cada vértice $u \in V(G)$, defina $B_u = N_G(u)$ e $A_u = V(G) \setminus B_u$

- Seja $k_3(G)$ o número de triângulos em G.
  ↳ não confundir com o K_3 (grafo completo de 3 vértices)

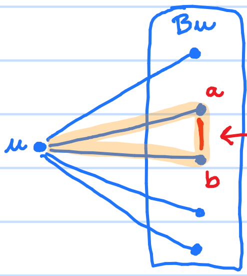
- Note que

$$k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u) \qquad (**)$$

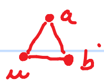
abuso de notação

$e(B_u) := e(G[B_u])$,

ou seja, o número de arestas no qual ambos os extremos pertencem à B_u

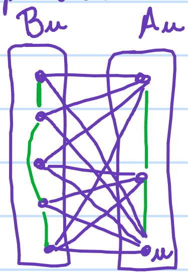


note que cada aresta ab em B_u cria um triângulo



Além disso, note esse triangulo será contado 3 vezes: quando olhamos B_u, B_a e B_b.

Note que as arestas roxas formam um grafo Bipartido

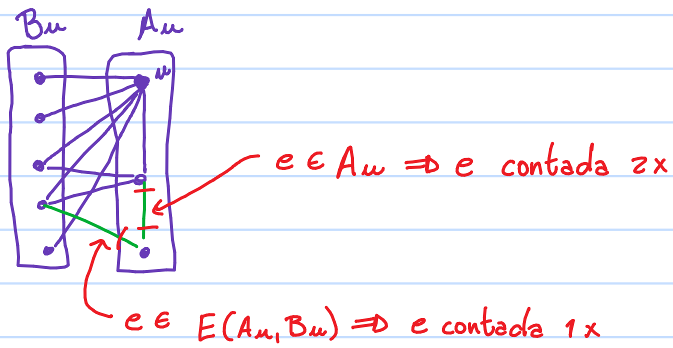


- Agora, observe que

$$e(A_u) + e(B_u) \geqslant t \qquad \forall u \in V(G) \qquad (*)$$

caso contrário poderíamos obter um subgrafo bipartido de G removendo menos de t arestas, contrariando o fato de G ser um grafo t-longe de ser bipartido

- Agora observe que $\sum_{v \in A_u} d_G(v) = 2e(A_u) + e(A_u, B_u)$ Ⓐ



- Sabemos que $e(G) = e(A_u) + e(A_u, B_u) + e(B_u)$ Ⓑ
- Por Ⓐ

$$\sum_{v \in A_u} d_G(v) = 2e(A_u) + e(A_u, B_u) \iff$$

$$-e(A_u) + \sum_{v \in A_u} d_G(v) = e(A_u) + e(A_u, B_u) \qquad \text{Ⓒ}$$

- Substituindo Ⓒ em Ⓑ, temos

$$e(G) = e(B_u) - e(A_u) + \sum_{v \in A_u} d_G(v) \iff$$

$$e(G) + e(A_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v) = e(B_u)$$

- Assim

$$e(B_u) + e(B_u) = e(G) + e(A_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v) + e(B_u)$$

$$2e(B_u) = e(G) + \underline{e(A_u) + e(B_u)} - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$$ Por (*)

$$\geq e(G) + t - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$$

- Logo $$e(B_u) \geq \frac{1}{2}\left[e(G) + t - \sum_{v \in A_u} d_G(v)\right] \qquad \text{ⓓ}$$

- Substituindo ⓓ em (**), temos

$$K_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u) \geq \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{2}\left[e(G) + t - \sum_{v \in A_u} d_G(v)\right]$$

próxima pg.

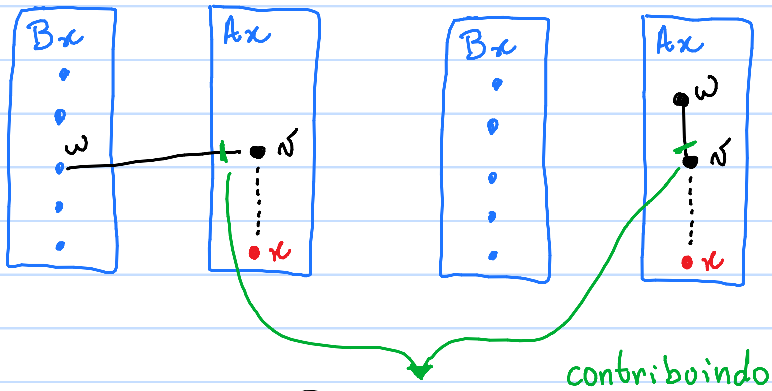
$$K_3(G) = \frac{1}{3}\sum_{u\in V(G)} e(B_u) \geq \frac{1}{3}\sum_{u\in V(G)} \frac{1}{2}\Big[e(G) + t - \sum_{v\in A_u} d_G(v)\Big]$$

$$= \frac{1}{6}\Big[\sum_{u\in V(G)} [e(G)+t] - \sum_{u\in V(G)}\sum_{v\in A_u} d_G(v)\Big]$$ ⓔ

$$= \frac{1}{6}\Big[n\big(e(G)+t\big) - \sum_{u\in V(G)}\sum_{v\in A_u} d_G(v)\Big]$$

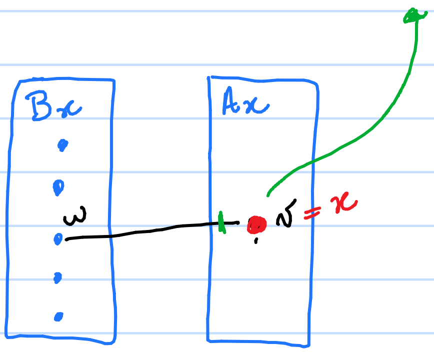
ordem importa

Agora, observe que $\sum_{u\in V(G)}\sum_{v\in A_u} d_G(v)$ está contando triplas (u, v, w) tais que $uv \notin E(G)$ e $vw \in E(G)$ (em particular, w pode ser v).



$$\sum_{x\in V(G)}\sum_{v\in A_x} d_G(v)$$

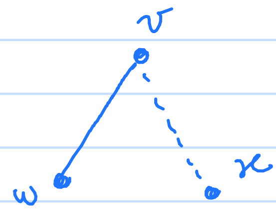
contribuindo com 1 unidade p/ o grau de v.



Note tbm que essa tripla (x, v, w) será contada apenas uma vez em $\sum_{u\in V(G)}\sum_{v\in A_u} d_G(v)$

E note que todas tripla são contadas

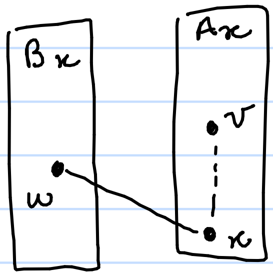
Se



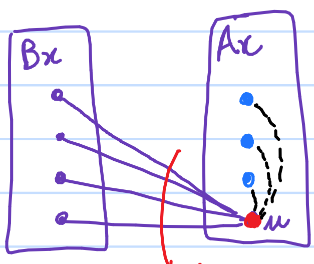
é uma cereja

Será contada exatamente 1x

$\Downarrow$



O número dessas triplas é



$$\sum_{u\in V(G)} d(u)\,(n - d(u))$$

$n - d(u)$ possibi. (u tbm pode ser posto nessa entrada)

$(\_\,, u, \_)$

$d(u)$

$d(u)$ possibilidades

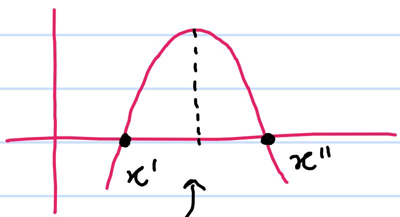
- Assim, por contagem dupla, temos

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v) = \sum_{v \in V(G)} d_G(v)(n - d_G(v)) \qquad (f)$$

A função $x(n-x)$ tem máximo em $x = \frac{n}{2}$, como argumentado abaixo

$$f(x) = x(n-x) = -x^2 + xn \longleftarrow n \text{ é uma constante}$$

f é uma função quadrática onde $a<0$. Logo ela é concava pr baixo



- o máximo estará no meio das duas raízes.
- Pela forma fatorada de $f(x) = x(n-x)$, fica claro que $x' = 0$ e $x'' = n$. Logo o máximo de f é dado por $x = \frac{n}{2}$
- Assim $f(x) \leqslant f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(n - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n^2}{4}$

- Assim $d_G(v)(n - d_G(v)) \leqslant \frac{n^2}{4}$

- Substituindo em (f), temos

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v) = \sum_{v \in V(G)} d_G(v)(n - d_G(v)) \leqslant \sum_{v \in V(G)} \frac{n^2}{4} = \frac{n^3}{4}$$

- Portanto

$$-\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v) \geqslant -\frac{n^3}{4}$$

• Finalmente, por ⓔ,

$$K_3(G) = \frac{1}{3}\sum_{u \in V(G)} e(B_u) \geq \frac{1}{6}\left[n(e(G)+t) - \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v) \right]$$

$$\geq \frac{1}{6}\left[n(e(G)+t) - \frac{n^3}{4} \right]$$

$$= \frac{n}{6}\left[e(G)+t - \frac{n^2}{4} \right]$$

□

TEO 1. Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo K_3-livre com n vértices. Se

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t,$$

então G contém um subgrafo bipartido com pelo menos $e(G) - t$ arestas.

Demo.

Pelo Teorema 3, se G é $(t+1)$-longe de ser bipartido, então o número de triângulos em G é pelo menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G) + t + 1 - \frac{n^2}{4} \right)$$

triângulo.

Como $e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$, temos que

$$\frac{n}{6}\left(e(G) + t + 1 - \frac{n^2}{4} \right) \geq \frac{n}{6}\left(\cancel{\frac{n^2}{4}} - \cancel{t} + \cancel{t} + 1 - \cancel{\frac{n^2}{4}} \right)$$

$$= \frac{n}{6} > 0,$$

o que é um absurdo pois G é K_3-livre.

Então G é t-próximo de ser bipartido e, portanto, contém um subgrafo bipartido $G' \subseteq G$ tal que $e(G') \geq e(G) - t$.

□

Teo 2. Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo com n vértices. Se

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t,$$

então G contém pelo menos $tn/3$ triângulos.

Demo.

- Se $e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t$, então G está t-longe de ser bipartido pelo Teorema de Mantel.
- Pelo Teorema 3, concluímos que G tem ao menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G) + t - \frac{n^2}{4}\right) \geq \frac{n}{6}\left(\cancel{\frac{n^2}{4}} + t + t - \cancel{\frac{n^2}{4}}\right)$$

$$\geq \frac{nt}{3}$$

triângulos $\square$

Teo. (Füredi, 2015) Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$, e seja G um grafo K_{k+1}-livre com n vértices. Se

$$e(G) \geq t_k(n) - t,$$

então G contém um subgrafo gerador k-partido com pelo menos $e(G) - t$ arestas.

Teorema Fundamental da Teoria Extremal dos Grafos

Teorema (Erdős e Stone, 46) Seja H um grafo não vazio. Então

$$ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right)\frac{n^2}{2}$$

qndo $n \to \infty$

Compreendendo notação assintótica

$$n + o(1) = n - \frac{\sqrt{n}}{n} \leq T(n) \leq n + \frac{1}{n} = n + o(1)$$

$$T(n) = n + o(1)$$